Lista 3: Cálculo I

A. Ramos *

March 25, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Continuação de límites e continuidade.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Limites ao infinito

Calcule os seguintes limites.

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+4}}}}{\sqrt{x+2}}.$$

   Rpta: 1.

2. $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right).$$

   Rpta: 1/4.

3. Seja
   $$f(x) = \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$
   Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. *Rpta:* 2 e 1/6.

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\alpha x-1}{\alpha x+1}\right)^x = 4$. Encontre α. *Rpta:* $\alpha = -1/ln(2)$.

5. Encontre o maior número α de tal modo que
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}+2x^{\alpha}}{\sqrt{3x^2+1}} \text{ seja finito }.$$
   Calcule dito limite. *Rpta:* $\alpha = 1$, $L = 2\sqrt{3}/3$.

6. Calcule $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$. *Rpta:* 0. *Dica:* Use a diferença de cossenos.

7. Ache as constantes m e b para que $\lim_{x\to\infty} \left(mx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0$. *Rpta:* $m = 1$, $b = 0$.

8. Calcule $\lim_{x\to\infty} (3^x+2^x)^{1/x}$. *Rpta:* 3.

9. Ache o valor de a para que
   $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+ax^3+1}{x^3-x+1} - \sqrt{x^2+3x+10}\right) = \frac{3}{2}.$$
   Rpta: $a = 3$. Talvez $x = 1/u$ ajude.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

2.2 Limites Infinitos

Calcule os seguintes limites.

1.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2-4x^3}{10x^2+6x^3} = \infty.$$

2.
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!]-x}{3-x} = -\infty.$$

3.
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-7x+6}{x^2+x-12} = -\infty.$$

4.
$$\lim_{x\to 4} \frac{1+|x^2-16|}{(4-x)\sqrt{5-|x+1|}} = \infty.$$

5.
$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-4}\right) = \infty.$$

2.3 Limites do exponencial e do logaritmo

Calcule os seguintes limites.

1. $\lim_{u\to\infty} \left(\frac{u-3}{1+u}\right)^{u-2} = e^{-4}$.
2. $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$.
3. $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(\cos h)}{h^2} = -\frac{1}{2}$.
4. Seja $n \in \mathbb{N}$. Verifique $\lim_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{n}{x}} = e^{2n}$.
5. $\lim_{x\to\pi/2} \cos(x)^{\tan(x)} = 1$.
6. $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{8}}$.
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{\ln^2(1+2x)} = \frac{9}{4}$
8. $\lim_{x\to\infty} \left(\cos(\frac{a}{x}) + b\sin(\frac{a}{x})\right)^x = e^{ab}$
9. Considere a, b e c números estritamente positivos. Calcule, $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

2.4 Continuidade, teorema do valor intermediario e teorema de Weierstrass

1. Determine para quais valores de x a função f não é contínua.

(a)
$$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & , \text{se } x \in (-\infty,-3] \\ x & , \text{se } x \in (3,\infty) \end{cases}$$

Rpta: Descontínua em $x=3$.

(b)
$$f(x) = \begin{cases} sgn\left(x^2-\frac{1}{4}\right) & , \text{se } x \in (-\infty,-1] \\ \frac{x^3}{x^2-9} & , \text{se } |x|<1 \\ -\frac{1}{8}+\sqrt{x^2-2x+1} & , \text{se } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

Rpta: Descontínua [1] em $x=-1$.

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{[\![x-1]\!]+[\![1-x]\!]}{2\sqrt{|x|-[\![x]\!]}} & , \text{se } x \in (0,2) \quad \text{e} \quad x \neq 1 \\ 2x-5 & , \text{se } x \in (2,\infty) \end{cases}$$

Rpta: Contínua em $x=2$, descontinua em $x \in \{0,1\}$.

[1]Lembre: A função sinal $sng(x)$ é definida como $sgn(x)=-1$ se $x<0$, $sgn(x)=1$ se $x>0$, e $sgn(x)=0$ se $x=0$

2. Determine o valor de a para que f seja contínua.

   -
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-x^2+x-1}{x-1} & \text{, se } x \neq 1 \\ a & \text{, se } x = 1 \end{cases}$$

     Rpta: $a = 3$

   -
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}-1}{x+1} & \text{, se } x < -1 \\ x + a & \text{, se } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

     Rpta: $a = 1/2$.

3. Determine os valores de a e b para que f seja contínua.

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{3-(3+3x)^{1/3}}{a(x^{1/3}-2)} & \text{, se } x < 8 \\ ab & \text{, se } x = 8 \\ \frac{2}{b|2x-7|} & \text{, se } x > 8 \end{cases}$$

   Rpta: $a = 2$, $b = -1/3$.

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} b[\![4 + 3x]\!] & \text{, se } x \in [1, 2) \\ 3x\sqrt{a - 2x} & \text{, se } x \in (2, 3) \\ 18 & \text{, se } x = 2 \end{cases}$$

   Rpta: $a = 13$, $b = 2$.

4. Mostre que $4x - 3 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem alguma raiz real.

5. Mostre que os gráficos de $y = x^2 \tan(x)$ e $y = 1$ têm interseção em pelos menos um ponto do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

6. Forneça um exemplo de uma função f que em dois pontos distintos a e b, tem sinais contrários, que não seja continua em $[a, b]$ e a tese do teorema do valor intermediário é verdadeira.

7. Considere as seguintes afirmações e decida se é verdadeira ou falsa, apresentando um contra-exemplo ou justificando através de uma demonstração.

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

   (b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é continua em $x = 0$, então f é continua em $x = 0$.

   (c) Considere duas funções f e g descontínuas em $x = 0$, então o produto fg é descontínua em $x = 0$.

8. Considere $f(x) = e^x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$, definido para $x > 0$.

   - Mostre que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função bijetora. Para isso mostre que
   $$e^x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2} = y$$
   admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

9. *Teorema do ponto fixo.* Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \in [0, 1]$ para todo x. Então, mostre que existe um $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Esse ponto é chamado de ponto fixo de f.

2.5 Problemas diversos

1. Considere um círculo de raio 9, e denote por $C_1(d)$ e por $C_2(d)$ o comprimentos de dois cordas [2] cuja distância ao centro do circulo é d e $\frac{9+d}{2}$ respectivamente, com $d \in (0, 9)$. Então, calcule $\lim_{d\to 9} \frac{C_1(d)+C_2(d)}{C_1(d)} (= \frac{2+\sqrt{2}}{2})$

2. Considere um setor circular de radio $R = R(\theta) > 0$ cujo ângulo central é θ e considere um triângulo equilátero ABC de lado L inscrito no setor circular tal que C está sobre o semi-circulo e o segmeto OC passa pelo ponto médio de AB. Encontre, $\lim_{\theta\to\pi/3} \frac{R(\theta)-L\sqrt{3}}{3x-\pi} (= -\frac{L}{3})$.

3. Seja uma caixa fechada de volume 2000 m^3. O material para as partes superior e inferior é de 3 R$ por metro quadrado, e o material para os lados é de 1.5 R$ por metro quadrado. Se x representa o comprimento (em metros) de um lado da base quadrada, e $C(x)$ o costo total do material.

   (a) Escreva a expressão que define $C(x)$ e especifique o dominio.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} C(x)$ e $\lim_{x\to\infty} C(x)$. Explique os resultados, em termos do problema.

   (c) Faça o gráfico de C.

[2] Uma corda é um segmeto que une dois pontos sobre o círculo.